4. LİNEER DÖNÜŞÜMLER

Bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına giden L tasviri (fonksiyonu) $L: V \to W$ ile gösterilir.

Tanım: Bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına giden, keyfi $v_1, v_2 \in V$ ve keyfi α, β skalerleri için

$$L(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha L(v_1) + \beta L(v_2)$$

şartını sağlayan, L fonksiyonuna <u>lineer dönüşüm</u> veya <u>lineer</u> operatör denir.

Eğer L lineer dönüşüm ise $L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ ve $L(\alpha v) = \alpha L(v)$ dir. Tersi de doğrudur.

$\mathbb{R}^2$'de Lineer Dönüşümler:

Ört 1. keyfi $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için $L(x) = 3x$ olsun.

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha x + \beta y) = 3(\alpha x + \beta y) = \alpha(3x) + \beta(3y)$$
$$= \alpha L(x) + \beta L(y)$$

L lineer dönüşümdür.

2. keyfi $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $L(x) = x_1 e_1$ olsun.

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $L(x) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha x + \beta y = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix}$$

$$L(\alpha x + \beta y) = (\alpha x_1 + \beta y_1) e_1 = \alpha (x_1 e_1) + \beta (y_1 e_1)$$

$$= \alpha L(x) + \beta L(y)$$

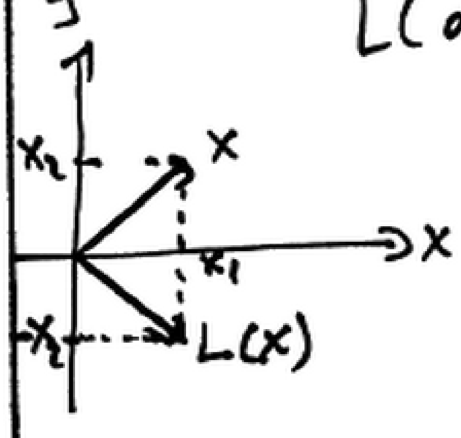
L Lineer dönüşümdür.

3. keyfi $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için $L(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$ olsun.

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha x + \beta y) = L\left(\begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ -\alpha x_2 - \beta y_2 \end{bmatrix}$$



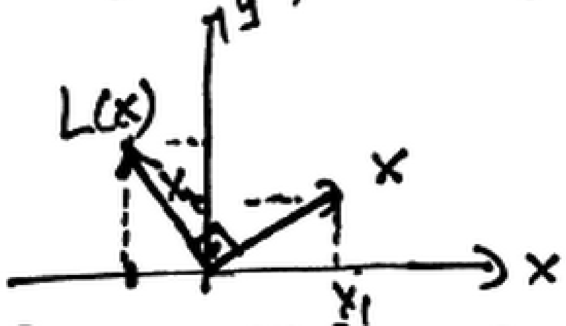
$$= \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha L(x) + \beta L(y)$$

Lineer dönüşümdür.

188

4. keyfi $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $L(x)=\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$ olsun.



$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha x+\beta y)=\begin{bmatrix} -\alpha x_2-\beta y_2 \\ \alpha x_1+\beta y_1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha L(x) + \beta L(y)$$

L lineer dönüşümdür.

190

5. keyfi $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ için $L(x)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2+1 \end{bmatrix}$ olsun

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2+1 \end{bmatrix}$$

$$L(3x) \stackrel{?}{=} 3L(x)$$

$$3x = 3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$L(3x) = L\left(\begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2+1 \end{bmatrix}$$

$$3L(x) = 3\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 \\ 3x_2+3 \end{bmatrix}$$

$$L(3x) \neq 3L(x)$$

L lineer dönüşüm değildir.

$\mathbb{R}^{n}$'den $\mathbb{R}^{m}$'ye Linear Dönüşümler:

Örk 1. $\forall x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ için $L(x)=x_1+x_2+x_3$ ile tanımlı $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ lineer dönüşüm müdür?

$x, y\in\mathbb{R}^3 \quad \alpha, \beta\in\mathbb{R}$

$$L(\alpha x+\beta y)=L\left(\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \alpha x_2+\beta y_2\\ \alpha x_3+\beta y_3\end{bmatrix}\right)=$$

$$=(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+(\alpha x_3+\beta y_3)$$

$$\cancel{=\alpha(x_1} =\alpha(x_1+x_2+x_3)+\beta(y_1+y_2+y_3)$$

$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

$$L(x)=x_1+x_2+x_3=\underset{1\times 3}{(1\ 1\ 1)}\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}$$

$$A=(1\ 1\ 1)$$

$$L(x)=A\cdot X$$

2. $L(x)=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}$ ile tanımlı $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ fonksiyon lineer dönüşüm müdür?

$$L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}$$

193

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2 \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

$$L(\alpha x+\beta y)=L\left(\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta y_1\\ \alpha x_2+\beta y_2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha x_2+\beta y_2\\ \alpha x_1+\beta y_1\\ \alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2\end{bmatrix}$$

$$=\alpha\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}y_2\\y_1\\y_1+y_2\end{bmatrix}$$

$$=\alpha L(x)+\beta L(y)$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\qquad L(x)=A.x$$

$$\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\x_1\\x_1+x_2\end{bmatrix}$$

194

Genel olarak, eğer A $m\times n$ tipinde bir matris ise $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye L_A lineer operatörü $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için

$$L_A(x)=A.x$$

olarak tanımlayabiliriz. Gerçekten

$$L_A(\alpha x+\beta y)=A.(\alpha x+\beta y)=\alpha(A.x)+\beta(A.y)$$
$$=\alpha L_A(x)+\beta L_A(y)$$

olduğundan L_A lineerdir. Bu yüzden her $m\times n$ tipindeki A matrisini $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye bir lineer operatör olarak düşünebiliriz.

195

V vektör uzayından W vektör uzayına lineer dönüşümler:

Teorem: Eğer L, V vektör uzayından W vektör uzayına bir lineer operatör ise

1) $L(0_V) = 0_W$ $\qquad L: V \to W$

$\qquad 0_V \to 0_W = L(0_V)$

2) $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalerler ise $L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 L(v_1) + \cdots + \alpha_n L(v_n)$

3) $\forall v \in V$ için $L(-v) = -L(v)$ dir.

196

Kanıt: (1) $L(\alpha v) = \alpha L(v)$

$\alpha = 0 \qquad L(0_V) = 0\, L(v) = 0_W$

örk. 1. V keyfi vektör uzayı olsun. keyfi $v \in V$ için

$$I(v) = v$$

ile tanımlı lineer operatörüne <u>birim operatör</u> denir.

$$\left(I(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha I(v_1) + \beta I(v_2) \right)$$

$$I : V \to V$$

2. L, $C[a,b]$'den $\mathbb{R}$'ye

$$L(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ile tanımlansın.

$f,g \in C[a,b]$ $\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$L(\alpha f+\beta g) = \int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \alpha L(f) + \beta L(g)$$

3. D, $C^1[a,b]$'den $C[a,b]$'ye

$$D(f) = f'$$

ile tanımlansın. (Türev operatörü)

$f,g \in C^1[a,b]$ $\quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}$

$$D(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)'$$

$$= \alpha f' + \beta g'$$

$$= \alpha D(f) + \beta D(g)$$

Görüntü ve Çekirdek

Tanım: $L: V \to W$ lineer dönüşüm olsun. $çekL$ ile gösterilen

$$çekL = (kerL) = \{v \in V : L(v) = 0_W\}$$

kümesine L'nin <u>çekirdeği</u> denir.

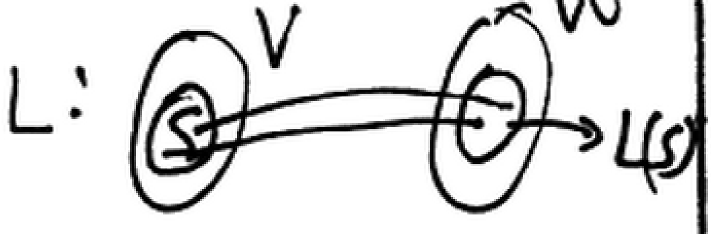
$çekL \subset V$

Tanım: $L: V \to W$ lineer dönüşüm ve S, V'nin bir altuzayı olsun. $L(S)$ ile gösterilen

$$L(S) = \{w \in W : w = L(v),\ v \in S\}$$

kümesine S'nin <u>görüntüsü</u> denir. V vektör uzayının görüntüsü $L(V)$ ile gösterilir ve L'nin <u>görüntü kümesi</u> denir.

$L(S) \subset W$



201

Teorem: $L: V \to W$ lineer dönüşüm ve S, V'nin bir alt uzayı ile
1) Çek L, V'nin bir alt uzayıdır
2) $L(S)$, W'nın bir alt uzayıdır.

kanıt: (1) i) $v_1, v_2 \in$ Çek L $\Rightarrow v_1+v_2 \overset{?}{\in}$ Çek L

$L(v_1)=L(v_2)=0$

$L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) = 0+0=0$

$v_1+v_2 \in$ Çek L

ii) $v \in$ Çek L $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha v \overset{?}{\in}$ Çek L

202

$L(v)=0$

$L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha . 0 = 0$

$\alpha v \in$ Çek L

Çek L, V'nin bir alt uzayıdır.

Örk. 1. $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $L(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineer dönüşümünün çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz.

Çek $L = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : L(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

$$L(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 0$$

$(x_2 = k \in \mathbb{R})$

$$\text{Çek } L = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : k \in \mathbb{R} \right\}$$

Çek L'nin boyutu $\left(\left\{ k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right)$ 1'dir.

$L(\mathbb{R}^2) = ?$

$$L(\mathbb{R}^2) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R} \right\}$$

$L(\mathbb{R}^2)$'nin boyutu 1'dir.

2. $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $L(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$ lineer dönüşüm

ve S, $\{e_1, e_3\}$ ile gerilen alt uzay olsun.

Çek$(L) = ?$ ve $L(S) = ?$

$$L(x) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x_3 = a \Rightarrow x_2 = -a$$

$$x_1 = +a$$

$$\text{Çek}\,L = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -a \\ a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2-2 \\ -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ çekL'in bir tabanıdır.

ÇekL'nin boyutu 1'dir

$$S = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$L(S) = ?$

$$L(S) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \mathbb{R}^2$$

3. $D : P_3 \to P_2$ $\quad D(p(x)) = p'(x)$ lineer operatörünün çekirdeğini ve görüntü kümesini bulunuz.

$$D(ax^2+bx+c) = 2ax+b$$

$$D(p(x)) = 0 \implies 2ax+b = 0.x+0.1$$
$$a = b = 0$$

$$\text{Çek}(D) = \{ d \in P_1 : d \in \mathbb{R} \}$$

$$D(P_3) = \{ kx + L : \ k, L \in \mathbb{R} \} = P_2$$

Lineer Dönüşümlerin Matris Gösterimi (Temsili):

Teorem: $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer operatör ise $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $L(x) = A \cdot x$ olacak şekilde bir $m \times n$ tipinde A matrisi vardır. Burada A'nın j. sütunu

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = L(e_j) \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

dir.

A'ya L'nin standart (doğal) baza göre matris gösterimi denir.

Örk: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineer operatörü $\forall x \in \mathbb{R}^3$ için $L(x) = (x_1 + x_2, \ x_2 + x_3)^T$ ile tanımlansın. L'nin doğal baza göre matris temsilini bulunuz.

$$L(e_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= 1\, e_1 + 0\, e_2$$

$$L(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(e_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

209

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix} \quad \underline{\underline{2\times 3}}$$

$$L(x)=AX=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\end{bmatrix}$$

Teorem! $E=[v_1,v_2,\dots,v_n]$ ve $F=[w_1,w_2,\dots,w_m]$ sırasıyla V ve W vektör uzaylarında sıralı bazlar ise her $L: V\to W$ lineer dönüşümü için

$$[L(v)]_F = A\,[v]_E \quad \forall\, v\in V \text{ için}$$

olacak şekilde $m\times n$ tipinde bir A matrisi vardır. Burada

210

$$\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}=\left[L(v_j)\right]_F \quad j=1,2,\dots,n$$

dir. A matrisine E ve F sıralı bazlarına göre L'nın matris gösterimi (temsili) dir.

Ört. 1. $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ lineer dönüşümü, $\forall x\in\mathbb{R}^3$ için

$$L(x)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2+x_3\end{bmatrix}$$ ile tanımlansın.

a) $E=[e_1,e_2,e_3]$ ve $F=\left[\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right]$

b) $E=\left[\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right]$ ve $F=$ //

Sıralı bazlarına göre L'nin matris temsilini bulun.

$$L(e_1) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L(e_1)\right]_F = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$L(e_2) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 1/2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L(e_2)\right]_F = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$L(e_3) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 1/2\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L(e_3)\right]_F = \begin{bmatrix}1/2\\1/2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$\left[L(v)\right]_F = A.[v]_E = A.v$$

b) $$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)\right]_F = \begin{bmatrix}1/2\\-1/2\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1.\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right]_F = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\left[L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_F = \begin{bmatrix}3/2\\+1/2\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}1/2 & 1 & 3/2\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}$$

$$[L(v)]_F = A\,[v]_E$$

2. $D(p(x)) = p'(x)$ olsun. $D: P_3 \to P_2$ lineer operatörü için $[x^2, x, 1]$ ve $[x, 1]$ sıralı bazlarına göre D'nin matris gösterimini bul.

$$D(x^2) = 2x = 2.x + 0.1$$
$$D(x) = 1 = 0.x + 1.1$$
$$D(1) = 0 = 0.x + 0.1$$

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Teorem: $E = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n]$ ve $F = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ sırasıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$'nin sıralı bazları olsun. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir lineer dönüşüm ve A, E ve F bazlarına göre L'nin matris gösterimi ise

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = B^{-1} L(u_j) \quad j = 1, 2, \dots, n$$

dır. Burada $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ dir.
(matris)

Sonuç: A, $E = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ ve $F = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ bazlarına göre $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$'nin matris gösterimi ise

$$(b_1, b_2, \dots b_m \mid L(u_1), \dots, L(u_n))$$

matrisinin indirgenmiş satır basamak formu $(I \mid A)$ dır.

Ört: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineer dönüşümü $L(x) = (x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2)^T$ olsun.
$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

217

$b_3=[1]$ ise $[u_1,u_2]$ ve $[b_1,b_2,b_3]$ sıralı tabanlarına göre L'nin matris temsilini bul.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$A=\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

218